

Constantes Generalizadas: Cuadripolos

Introducción

El objetivo de este capítulo apunta al remplazo de los modelos utilizados para representar a las líneas y otros constituyentes de los sistemas de potencia por cuadripolos caracterizados por cuatro constantes A,B,C,D, las cuales nos permitirán disponer de una base de datos útiles a la hora de realizar estudios eléctricos; como así también poder abordar la construcción e interpretación de los diagramas del círculo, útiles estos últimos para comenzar con los estudios de flujos de potencia.

Definiciones

Cuadripolo: Modelo representativo de un sistema constituido por dos bornes de entrada y dos de salida.

Cuadripolo pasivo, lineal y bilateral: Es aquel que no contiene fuentes de energía interna, las impedancias de sus componentes son independientes de la magnitud de la corriente que las atraviesa, como así también las impedancias no se ven afectadas por el sentido de circulación de la corriente.

Se demuestra que cualquier red que cumpla con las condiciones antedichas podrá ser representada mediante un cuadripolo en T o π .

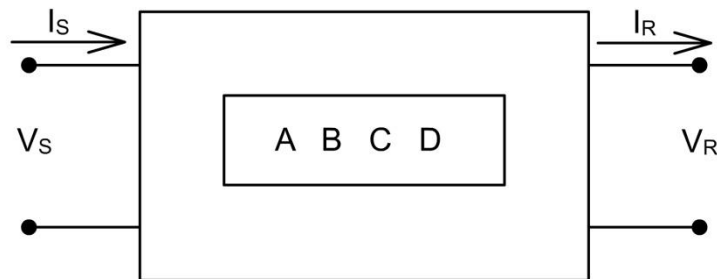


Fig.1 Cuadripolo

$$A = |A|^{\alpha}$$

$$B = |B|^{\beta}$$

$$C = |C|^{\varepsilon}$$

$$D = |D|^{\Delta}$$

Como puede observarse, las constantes A,B,C,y D son complejos

Definimos las siguientes ecuaciones

$$\text{generales del cuadripolo: } \begin{cases} V_S = A \cdot V_R + B \cdot I_R & (1) \\ I_S = C \cdot V_R + D \cdot I_R & (2) \end{cases}$$

Analizaremos a continuación un cuadripolo en T y otro en π formados por impedancias lineales, pasivas y bilaterales y determinaremos el valor de las constantes generalizadas.

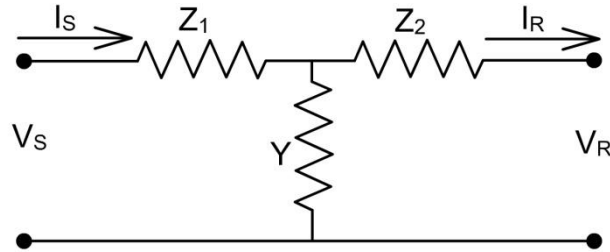


Fig. 2

$$I_S = I_R + Y \cdot (V_R + I_R \cdot Z_2) = Y \cdot V_R + (1 + Y \cdot Z_2) \cdot I_R$$

$$V_S = V_R + I_R \cdot Z_2 + I_S \cdot Z_1 = V_R + I_R \cdot Z_2 + Y \cdot V_R \cdot Z_1 + I_R \cdot Z_1 + I_R \cdot Y \cdot Z_1 \cdot Z_2$$

$$V_S = (1 + Y \cdot Z_1) \cdot V_R + (Z_1 + Z_2 + Y \cdot Z_1 \cdot Z_2) \cdot I_R$$

Comprando las ecuaciones del cuadripolo en T con las ecuaciones generales, podemos determinar el valor de las constantes A, B, C y D

$$A = 1 + Y \cdot Z_1$$

$$B = Z_1 + Z_2 + Y \cdot Z_1 \cdot Z_2$$

$$C = Y$$

$$D = 1 + Y \cdot Z_2$$

Haciendo un análisis similar para un cuadripolo en π como el de la Fig. 3 o Fig. 4 (simétrico), las constantes valdrán:

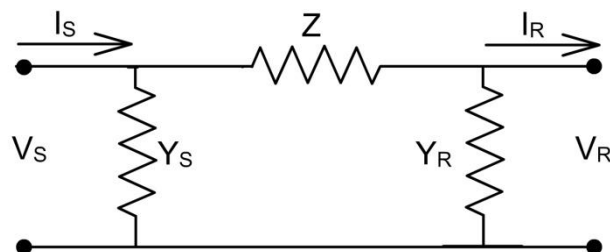


Fig. 3

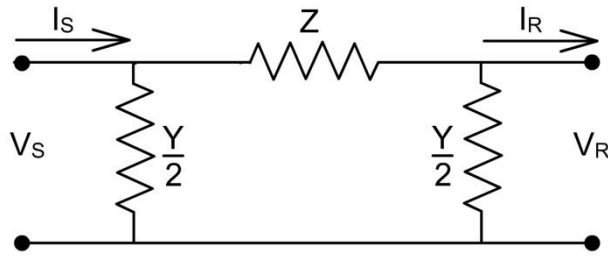


Fig. 4

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + Z \cdot Y_R \\ B &= Z \\ C &= Y_R + Y_S + Z \cdot Y_R \cdot Y_S \\ D &= 1 + Y_S \cdot Z \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Para un cuadripolo asimétrico} \\ \text{Para un cuadripolo simétrico} \rightarrow \end{array} \left\{ \begin{aligned} A &= 1 + \frac{Z \cdot Y}{2} \\ B &= Z \\ C &= Y + \frac{Z \cdot Y^2}{4} \\ D &= 1 + \frac{Z \cdot Y}{2} \end{aligned} \right.$$

De las anteriores podemos escribir:

$$Y_R = \frac{A-1}{B}; \quad Y_S = \frac{D-1}{B} \quad (3.1) \quad Y = \frac{(A-1) \cdot 2}{B} \quad (4)$$

En forma similar, si recordamos las ecuaciones hiperbólicas de las líneas largas y las comparamos con las ecuaciones generales de los cuadripolos obtendremos:

$$\left\{ \begin{aligned} V_S &= \text{Ch } \gamma l \cdot V_R + Z_0 \cdot \text{Sh } \gamma l \\ I_S &= \frac{\text{Sh } \gamma l}{Z_0} \cdot V_R + \text{Ch } \gamma l \cdot I_R \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \text{Ch } \gamma l \\ B &= Z_0 \cdot \text{Sh } \gamma l \\ C &= \frac{\text{Sh } \gamma l}{Z_0} \\ D &= \text{Ch } \gamma l \end{aligned} \right.$$

Relaciones entre las constantes generalizadas

Para justificar las relaciones existentes entre las constantes, realizaremos un experimento virtual consistente en alimentar al cuadripolo desde los bornes de entrada o desde los bornes de salida y cortocircuitar los otros dos, tal como se muestra en las Fig. 5 y 6

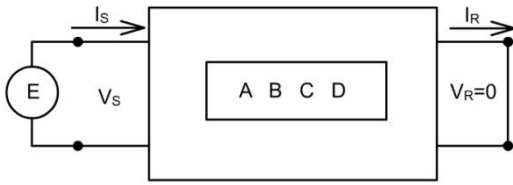


Fig. 5

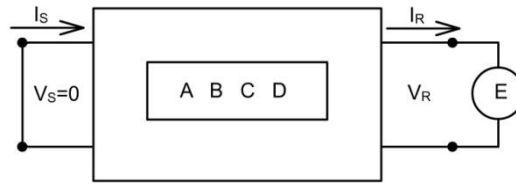


Fig. 6

Observando la Fig. 5 y teniendo en cuenta las ecuaciones 1 y 2 podemos escribir:

$$E = 0 + B \cdot I_2 \quad \therefore \quad I_2 = \frac{E}{B}$$

Observando ahora la Fig. 6, podemos decir que hemos intercambiado la fem por el corto circuito. Esto no lleva a recordar el teorema de la reciprocidad, por el cual podríamos decir que la lectura del amperímetro será la misma, es decir la I_S de la Fig. 6 debería ser igual a I_2 de la Fig. 5.

Las ecuaciones (1) y (2) aplicadas a la Fig. 6 quedarán:

$$0 = A \cdot E + B \cdot I_R \quad (6)$$

$$I_S = -I_2 = C \cdot E + D \cdot I_R \quad (7)$$

De la (6) obtenemos: $I_R = -\frac{A \cdot E}{B}$ y reemplazando en (7)

$$-I_2 = C \cdot E + D \left(-\frac{A \cdot E}{B} \right) = C \cdot E - \frac{A \cdot E \cdot D}{B} \quad (8)$$

Sustituyendo (5) en (8) resulta:

$$-\frac{E}{B} = C \cdot E - \frac{A \cdot E \cdot D}{B} \quad \text{Dividiendo m a m por } -\frac{E}{B} \text{ resulta finalmente:}$$

$$\boxed{A \cdot D - B \cdot C = 1} \quad (9)$$

También, resolviendo el sistema de dos ecuaciones (1) y (2) y teniendo en cuenta la (9), resultarían las siguientes ecuaciones:

$$V_R = \frac{D \cdot V_S - B \cdot I_S}{A \cdot D - B \cdot C} = \frac{D \cdot V_S - B \cdot I_S}{1} \quad (10)$$

$$I_R = \frac{A \cdot I_S - C \cdot V_S}{A \cdot D - B \cdot C} = \frac{A \cdot I_S - C \cdot V_S}{1} \quad (11)$$

Interpretación física de las constantes

A partir de las ecuaciones (1) y (2) y suponiendo que la corriente $I_R = 0$ (Vacio) resulta:

$$A = \frac{V_S}{V_R} \quad \text{y} \quad C = \frac{I_S}{V_R}$$

Si suponemos ahora que la salida del cuadripolo se pone en corto $V_R = 0$ resulta:

$$B = \frac{V_S}{I_R} \quad \text{y} \quad D = \frac{I_S}{I_R}$$

La constante A es la relación de tensiones de entrada y salida en vacio y D la relación de corrientes de entrada y salida poniendo la salida en corto.

En cambio la constante B tiene la dimensión de una impedancia y en el caso de los cuadripolos simétricos en π corresponde a la impedancia serie.

De la observación de las constantes para el caso de un cuadripolo en π simétrico resulta que $A = B$.

Estas relaciones entre constantes nos ayudan a resolver los problemas inherentes a los cuadripolos lineales, simétricos y pasivos.

Gráficos para la determinación de las constantes generalizadas

Povejsil y Johnson publicaron una serie de gráficos que permiten determinar las constantes A,B,C, y D a partir del conocimiento de los valores de R y X y la longitud de la línea.

La construcción de los gráficos se basa en el hecho de que el producto $L \cdot C$ es practicamente constante para todas las líneas (Recordemos que la velocidad de propagación en las líneas aereas es muy próxima a la velocidad de la luz y para

las lineas sin pérdidas vale $v_p = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$)

Por lo tanto si $L \cdot C$ es igual para todas las líneas, $\gamma \cdot l$ resultará función de la relación $\frac{R}{X}$:

$$\gamma \cdot l = \sqrt{Z \cdot Y \cdot l} = \sqrt{(R + j\omega \cdot L) \cdot j\omega \cdot C \cdot l} = \sqrt{\omega^2 \cdot L \cdot C} \cdot \sqrt{-1 + j \frac{R}{\omega \cdot L}} \cdot l \quad (12)$$

Remplazando el producto de $L \cdot C$ por las expresiones que nos vinculan estos parámetros con la geometría de la línea, tendremos:

$$\sqrt{\omega^2 \cdot L \cdot C} = \sqrt{\omega^2 \cdot 0,7411 \cdot 10^{-3} \cdot \log \frac{D_m}{r'} \cdot \frac{0,0388 \cdot 10^{-6}}{\log \frac{D_m}{r}}} \quad (13)$$

Operando,remplazando $r' = 0,7788 \cdot r$ y si elegimos una $f = 60 \text{ Hz}$ resulta:

$$\sqrt{\omega^2 \cdot L \cdot C} = 10^{-3} \cdot \sqrt{4,09 + \frac{0,444}{\log \frac{D_m}{r}}} \quad (14)$$

La expresión (14) es muy aproximadamente independiente de $\frac{D_m}{r}$ y por lo tanto constante para todas las líneas (Varía entre $2,05 \cdot 10^{-3}$ y $2,07 \cdot 10^{-3}$ para líneas de 60Hz)

Aunque la expresión (14) se ha aplicado a un conductor macizo, se podría extender a otro tipo de conductor, ya que el segundo término del subradical sería debilmente afectado.

Recordando los valores de las constantes para líneas largas:

$$Z_0 = |Z_0| \cdot L\varepsilon; \quad A = \text{Ch } \gamma \cdot l; \quad B = |Z_0| \cdot \text{Sh } \gamma \cdot l L\varepsilon; \quad C = \frac{\text{Sh } \gamma \cdot l}{|Z_0|} \cdot L\varepsilon; \quad D = A \quad (15)$$

Vemos que las constantes A y D son adimensionales e independientes de Z_0 . En cambio B depende de Z_0 . Por lo tanto los gráficos de B estan contruidos por unidad de Z_0 (Impedancia caracteristica).

Cuando las constantes A,B,C y D se expresan por unidad de $[Z_0]$ se convierten en:

$$A = \text{Ch } \gamma \cdot l_{(pu)}; \quad B = \frac{B_{[\Omega]}}{|Z_0|} = \text{Sh } \gamma \cdot l L \cdot \varepsilon_{(pu)}; \quad C = |Z_0| \cdot C_{[\Omega^{-1}]} = \text{Sh } \gamma \cdot l L \cdot \varepsilon_{(pu)}; \quad D = A$$

Sustituyendo $\gamma \cdot l$ dado en la (12) y tomando $\sqrt{\omega^2 \cdot L \cdot C} = 2,06 \cdot 10^{-3}$ tendremos para las constantes por unidad de $[Z_0]$:

$$\begin{cases} A = \text{Ch} \left(2,06 \cdot 10^{-3} \cdot l \cdot \sqrt{-1 + j \frac{R}{X}} \right) & (\text{pu}) \\ B = \text{Sh} \left(2,06 \cdot 10^{-3} \cdot l \cdot \sqrt{-1 + j \frac{R}{X}} \right) \cdot L \cdot \varepsilon & (\text{pu}) \\ C = \text{Sh} \left(2,06 \cdot 10^{-3} \cdot l \cdot \sqrt{-1 + j \frac{R}{X}} \right) \cdot L \cdot \varepsilon & (\text{pu}) \\ D = A \end{cases} \quad (16)$$

El ángulo ε asociado a la impedancia característica es función de $\frac{R}{X}$ ya que:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega \cdot L}{j\omega \cdot C}} = |Z_0| \cdot L \cdot \frac{\text{tg}^{-1} \frac{\omega \cdot L}{R} - 90}{2} \quad \varepsilon = \frac{-1}{2} \cdot \text{tg}^{-1} \frac{R}{X} \quad (17)$$

Las funciones (16) corresponden a las constantes A,B,C,D, expresadas en función de relación $\frac{R}{X}$ y de la longitud "l" de la línea. Estas funciones estan representadas en las figuras adjuntas, habiendo separado las partes reales e imaginarias de cada constante, de manera que el valor final de cada constante resultará de hacer:

$$A = A_1 + jA_2 \quad B = B_1 + jB_2 \quad C = C_1 + jC_2$$

Tal como vimos anteriormente las constantes A y D son adimensionales, mientras que B y C se miden en ohms y mhos respectivamente y estan referidas a la impedancia característica Z_0 por consiguiente:

$$B [\Omega] = |Z_0| \cdot B (\text{pu}) \quad C [\Omega^{-1}] = \frac{C (\text{pu})}{|Z_0|} \quad (18)$$

Por su parte la impedancia característica Z_0 se puede expresar en función de la relación $\frac{R}{X}$ si se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

a) El producto $L \cdot C = \text{cte}$ para todas las líneas aéreas ya que esta relacionado directamente con la velocidad de propagación, la cual es muy próxima a la velocidad de la luz.

b) Adoptando $\sqrt{\omega^2 \cdot L \cdot C} = 2,06 \cdot 10^{-3} \therefore \omega \cdot C = \frac{4,24 \cdot 10^{-6}}{\omega \cdot L} \quad (19)$

Sustituyendo (19) en (17)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + \omega \cdot L}{j4,24} \cdot 10^{-6} \cdot \omega \cdot L} = \frac{10^3 \cdot \omega \cdot L}{2,06} \cdot \sqrt{-j \frac{R}{\omega \cdot L} + 1} \quad (20)$$

La (20) nos permite obtener Z_0 a partir de la relación $\frac{R}{X}$ y del valor de X

Agrupamiento de cuadripolos

El agrupamiento de cuadripolos permite hacer frente al estudio de interconexiones de líneas de distintas características o al agrupamiento de transformadores y líneas u otro tipo de interconexión donde debemos reemplazar a las partes por un único cuadripolo resultante.

Cuadripolos en serie

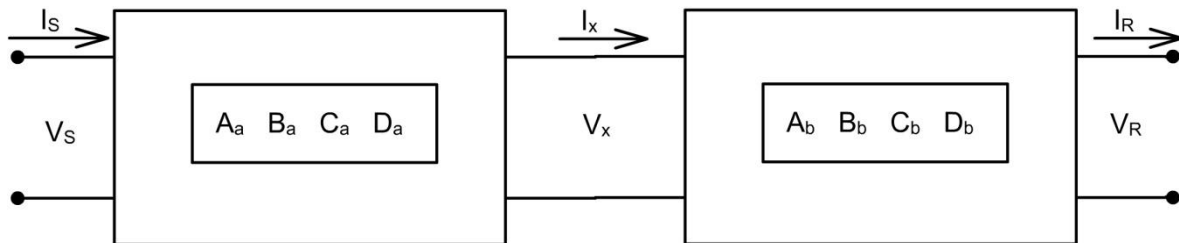


Fig. 7

Para el primer cuadripolo se cumplen las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= D_a \cdot V_S - B_a \cdot I_S \\ I_x &= C_b \cdot V_S + A_a \cdot I_S \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Para el segundo cuadripolo se cumple:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= A_b \cdot V_R - B_b \cdot I_R \\ I_x &= C_b \cdot V_R + D_b \cdot I_R \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Igualando (21) con (22)

$$D_a \cdot V_S - B_a \cdot I_S = A_b \cdot V_R + B_b \cdot I_R \quad (23)$$

$$C_a \cdot V_S + S_a \cdot I_S = C_b \cdot V_R + D_b \cdot I_R \quad (24)$$

Multiplicando la (23) por A_a y la (24) por B_a y sumando m a m las ecuaciones resultantes tendremos:

$$(A_a \cdot D_a - B_a \cdot C_a) \cdot V_S = (A_a \cdot A_b + B_a \cdot C_b) \cdot V_R + (A_a \cdot B_b - B_a \cdot D_b) \cdot I_R \quad (25)$$

Multiplicando la (23) por C_a y la (24) por D_a y sumando m a m las ecuaciones resultantes tendremos:

$$(A_a \cdot D_a - B_a \cdot C_a) \cdot I_S = (A_b \cdot C_a + C_b \cdot D_a) \cdot V_R + (B_b \cdot C_a - D_a \cdot D_b) \cdot I_R \quad (26)$$

Teniendo en cuenta que $(A_a \cdot D_a - B_a \cdot C_a) = 1$ las ecuaciones (25) y (26) expresan los valores de V_S e I_S en función de V_R e I_R , donde las nuevas constantes generalizadas resultantes serán:

$$A_0 = A_a \cdot A_b + B_a \cdot C_b$$

$$B_0 = A_a \cdot B_b + B_a \cdot D_b$$

$$C_0 = A_b \cdot C_a + C_b \cdot D_a$$

$$D_0 = B_b \cdot C_a + D_a \cdot D_b$$

Estas nuevas constantes resultarían de hacer el producto de las matrices de las constantes de cada cuadripolo.

$$\begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{vmatrix}$$

Cuadripolos en paralelo

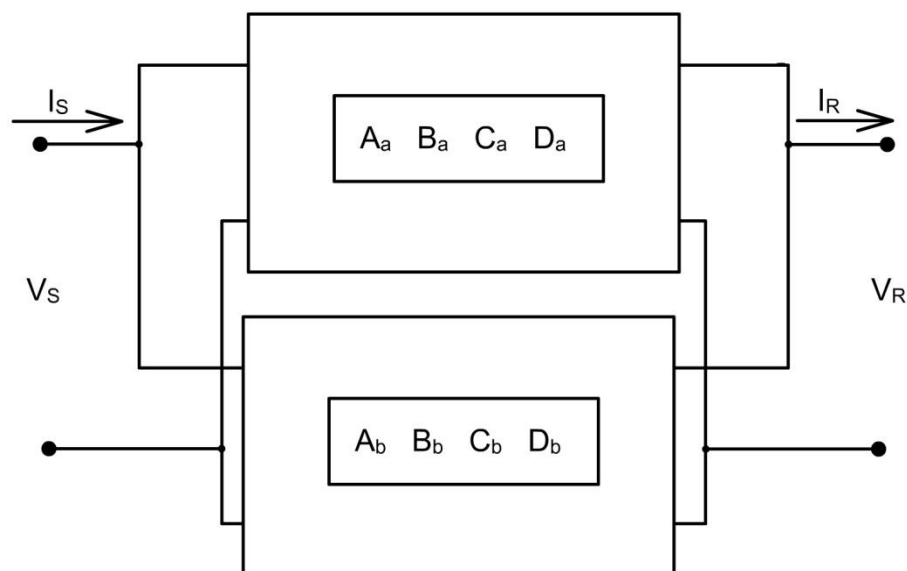


Fig. 8

Una forma sencilla de deducir el valor de las constantes del cuadripolo resultante de conectar dos cuadripolos en paralelos, es considerar sus circuitos equivalentes π y sumar las admitancias en paralelo y hallar el valor resultante de las impedancias en paralelo como se observa en la Fig. 9.

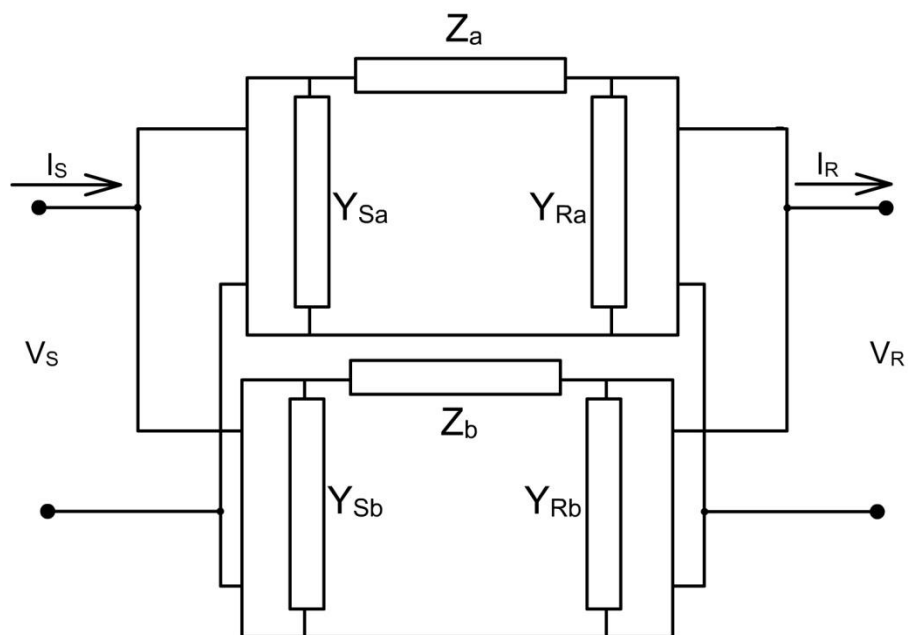


Fig. 9

Observando la Fig. 9 podemos escribir:

$$\left. \begin{aligned} Y_R &= Y_{Ra} + Y_{Rb} \\ Y_S &= Y_{Sa} + Y_{Sb} \\ Z &= \frac{Z_a \cdot Z_b}{Z_a + Z_b} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.1), las expresiones (27) resultarán:

$$\left. \begin{aligned} Y_R &= \frac{A_a - 1}{B_a} + \frac{A_b - 1}{B_b} \\ Y_S &= \frac{D_a - 1}{B_a} + \frac{D_b - 1}{B_b} \\ Z &= \frac{B_a \cdot B_b}{B_a + B_b} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Sustituyendo los valores dados en las (28) en las (3) se obtienen las constantes del cuadripolo resultante del paralelo:

$$A_0 = \frac{A_a \cdot B_b + A_b \cdot B_a}{B_a + B_b} \quad B_0 = \frac{B_a \cdot B_b}{B_a + B_b} \quad D_0 = \frac{B_b \cdot D_a + B_a \cdot D_b}{B_a + B_b} \quad (29)$$

La constante C_0 se puede obtener a partir de la igualdad $A_0 \cdot D_0 - B_0 \cdot C_0 = 1$ resultando: $C_0 = C_a + C_b + \frac{(A_a - A_b) \cdot (D_b - D_a)}{B_a + B_b}$ (30)

Medida de las constantes generalizadas

La determinación del valor de las constantes generalizadas de una línea construida podría hacerse a partir de las expresiones (3) conociendo los parámetros, o realizando algunas mediciones consistentes en medir tensiones y corrientes en ambos extremos de la línea.

Teniendo en cuenta que las constantes generalizadas son valores complejos; al medir tensiones y corrientes con sus respectivas fases quedarán definidas las constantes.

Llamando:

Z_{Z0} = Impedancia medida desde el extremo transmisor con el extremo receptor abierto.

Z_{SS} = Impedancia medida desde el extremo transmisor con el extremo receptor en corto circuito.

Z_{R0} = Impedancia medida desde el extremo receptor con el extremo transmisor abierto.

Z_{RS} = Impedancia medida desde el extremo receptor con el extremo transmisor en corto circuito.

Las impedancias medidas desde el extremo transmisor, teniendo en cuenta las expresiones (1) y (2), resultarán:

$$\text{Con } I_R = 0 \text{ (Vacío)} \quad Z_{S0} = \frac{V_S}{I_S} = \frac{A}{C} \quad (31)$$

$$\text{Con } V_R = 0 \text{ (Corto)} \quad Z_{SS} = \frac{V_S}{I_S} = \frac{B}{D} \quad (32)$$

Las impedancias medidas desde el extremo receptor, teniendo en cuenta las expresiones (10) y (11) ; cambiando el signo de las corrientes pues ahora suponemos que aplicamos tensión en el extremo receptor; resultarán de aplicar las siguientes:

$$V_R = D \cdot V_S + B \cdot I_S \quad (33)$$

$$I_R = C \cdot V_S + A \cdot I_S \quad (34)$$

$$\text{Con } I_S = 0 \text{ (Vacío)} \quad Z_{R0} = \frac{V_R}{I_R} = \frac{D}{C} \quad (35)$$

$$\text{Con } V_S = 0 \text{ (Cortoo)} \quad Z_{RS} = \frac{V_R}{I_R} = \frac{B}{A} \quad (36)$$

Los valores de las constantes en función de las impedancias medidas son las siguientes:

$$Z_{R0} - Z_{RS} = \frac{A \cdot D - B \cdot C}{A \cdot C} = \frac{1}{A \cdot C} \quad (37)$$

$$\frac{Z_{R0} - Z_{RS}}{Z_{S0}} = \frac{1}{A \cdot C} \cdot \frac{C}{A} = \frac{1}{A^2}, \text{ Resultando finalmente: } A = \sqrt{\frac{Z_{S0}}{Z_{R0} - Z_{RS}}} \quad (38)$$

Una vez determinada la constante A con la expresión (38), podemos determinar las demás constantes utilizando las expresiones (31) a (36).

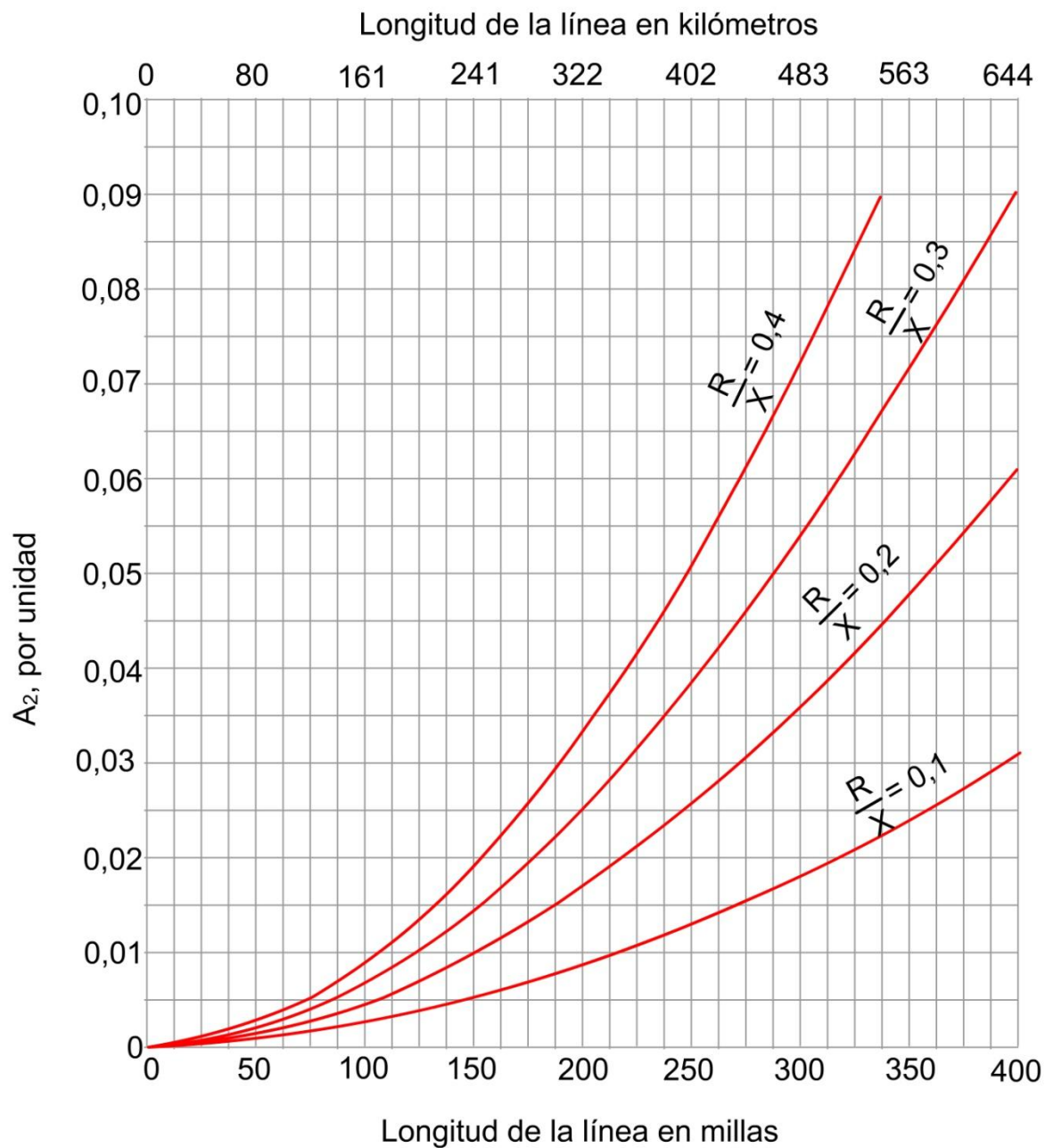
La utilización de las constantes generalizadas, permite la obtención de expresiones que vinculan las tensiones o corrientes de ambos extremos de las líneas mas simples.

Las constantes pueden aplicarse a solamente una parte del equipamiento, tal como un transformador, a la línea sola o la línea mas el transformador y otros aparatos terminales que no contengan fuerzas electromotrices. Tambien pueden aplicarse a cualquier número de líneas combinadas en serie o paralelo.

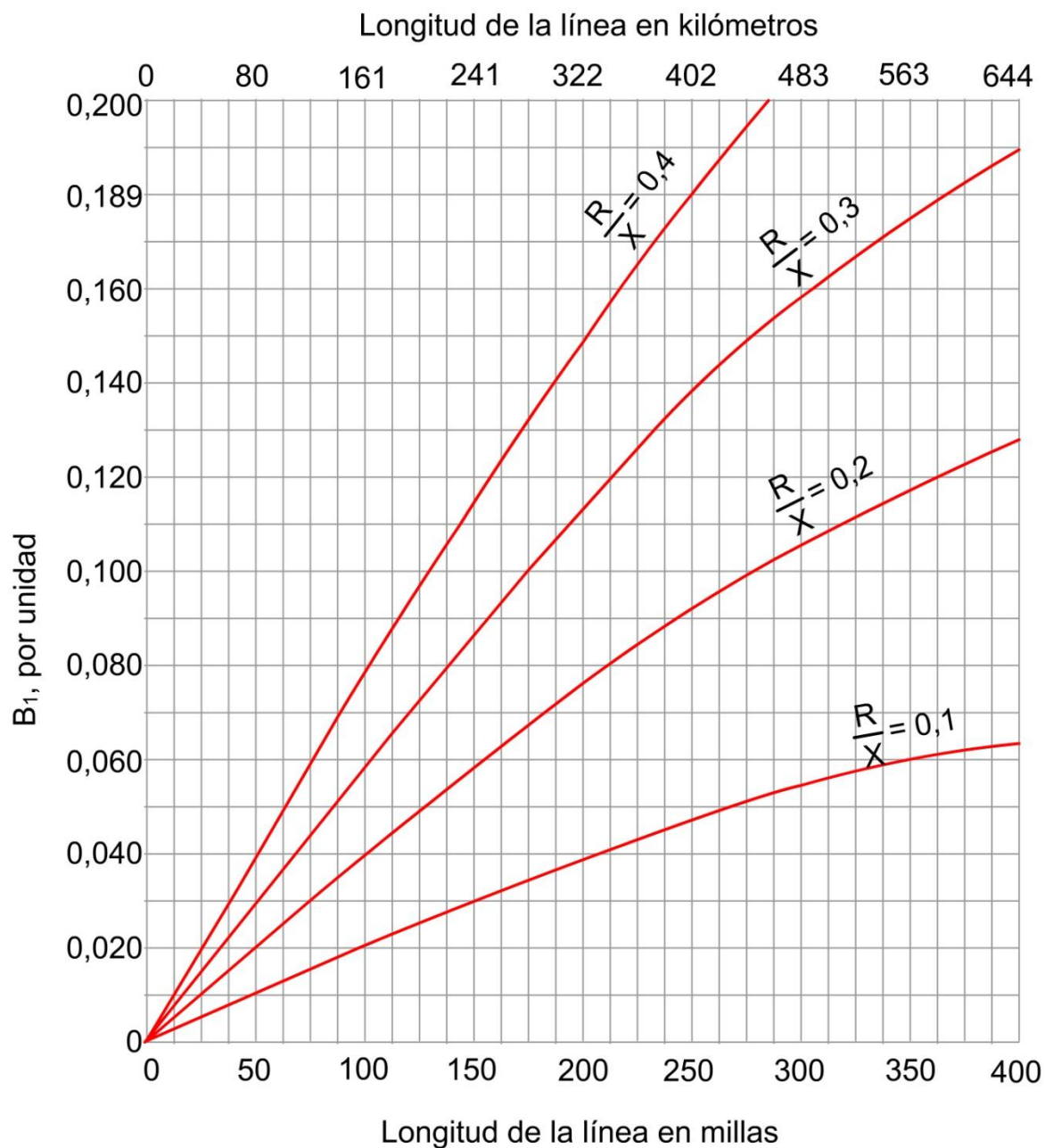
Finalmente digamos que las constantes generalizadas se utilizan para la deducción e interpretación de los diagramas circulares de los sistemas de transmisión.



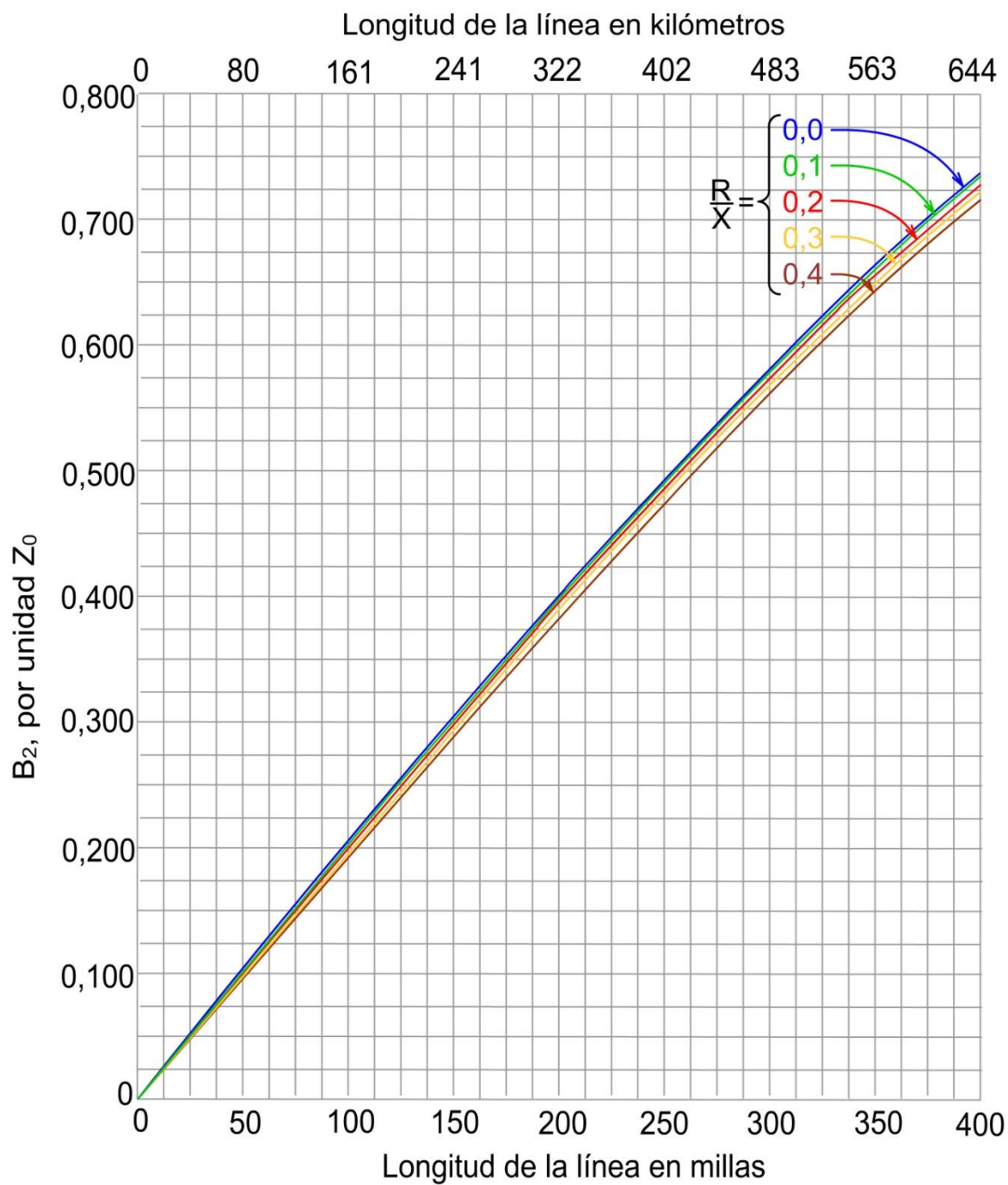
Constante $A = A_1 + jA_2$ en función de la longitud de la línea en millas o en Kilómetros (D.J. Povejsil y A.A.Johnson)



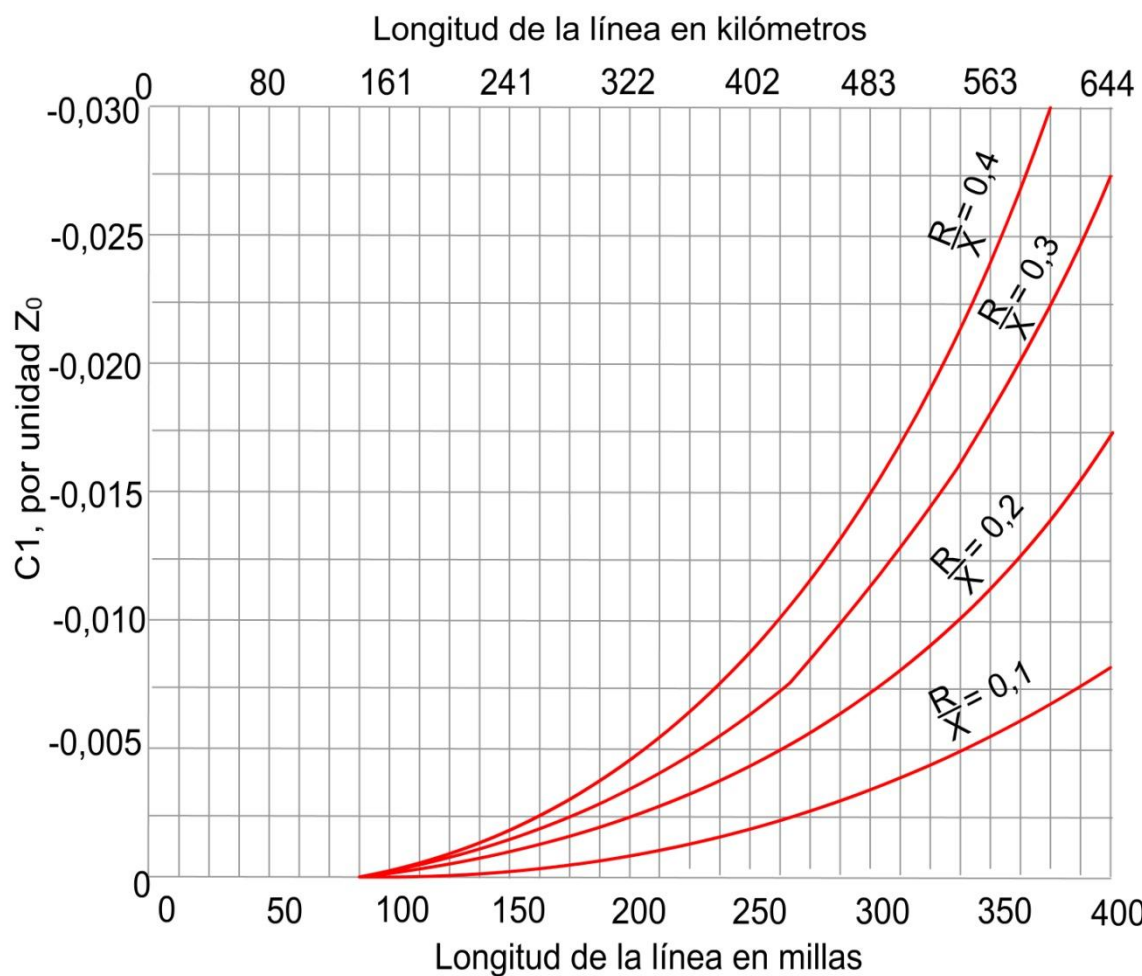
Constante $A = A_1 + jA_2$ en función de la longitud de la línea en millas o en Kilómetros (D.J. Povejsil y A.A.Johnson)



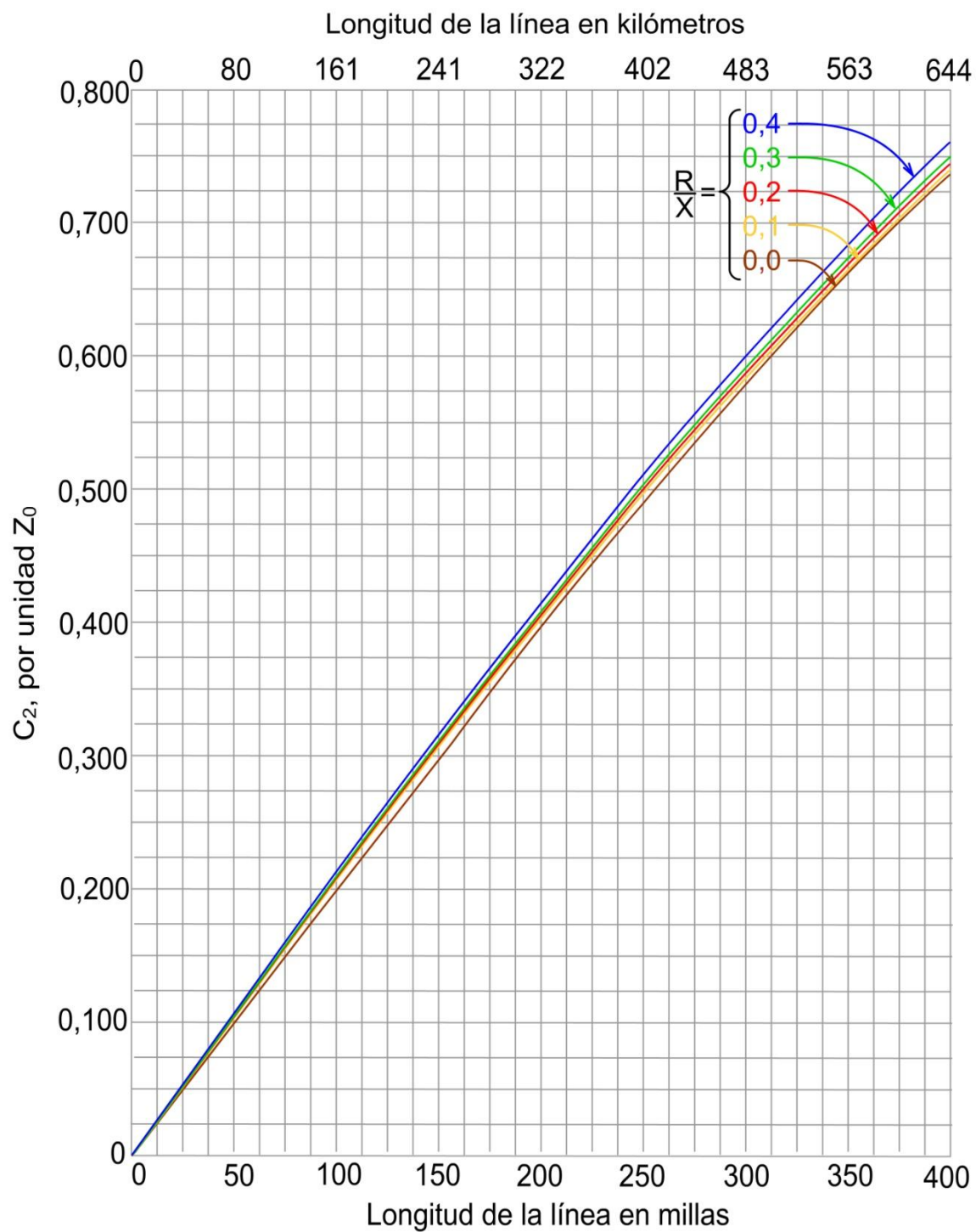
Constante $B = B_1 + jB_2$ en por unidad de impedancia característica Z_0 de una línea en función de la longitud de la línea en millas o en Kilómetros (D.J. Povejsil y A.A.Johnson)



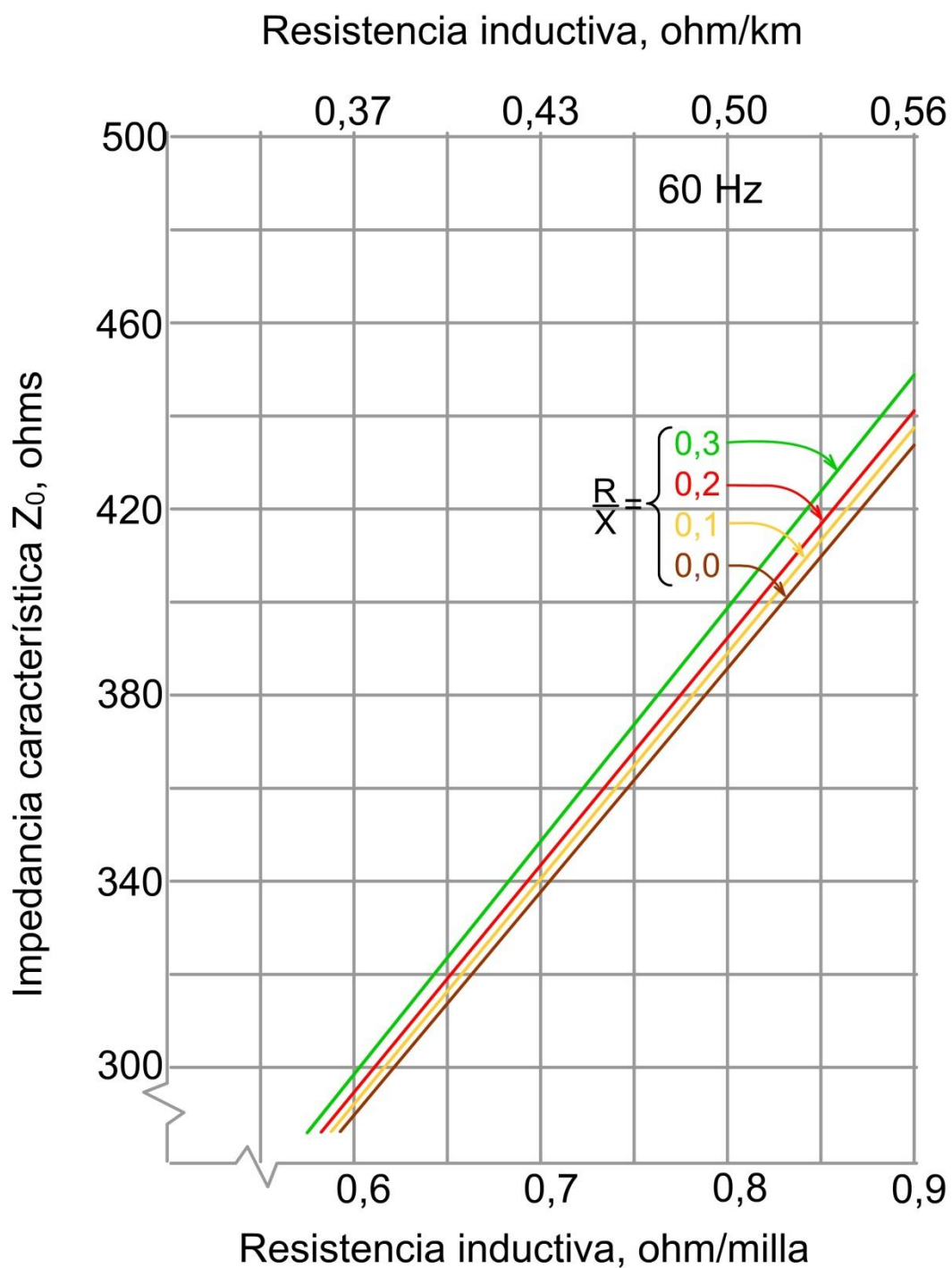
Constante $B = B_1 + jB_2$ en por unidad de impedancia característica Z_0 de una línea en función de la longitud de la línea en millas o en Kilómetros (D.J. Povejsil y A.A.Johnson)



Constante $C = C_1 + jC_2$ en por unidad de impedancia característica Z_0 de una línea en función de la longitud de la línea en millas o en Kilómetros (D.J. Povejsil y A.A.Johnson)



Constante $C = C_1 + jC_2$ en por unidad de impedancia característica Z_0 de una línea en función de la longitud de la línea en millas o en Kilómetros (D.J. Povejsil y A.A.Johnson)



Impedancia característica de líneas aéreas en función de la reactancia inductiva por milla o por kilómetro (D.J. Povejsil y A.A.Johnson)